Fundação Educacional de Ensino Superior de Frutal
Avenida Professor Mario Palmério nº 1000 – Bairro Universitário
38200-000 - FRUTAL - MG - Fone (34) 3423-9400
CNPJ. 06.172.537/0001-15 - Inscrição Municipal: 00113207-4
Campus Frutal

Curso de Sistemas de Informação

Semântica da Lógica Proposicional

Prof. Sérgio Carlos Portari Júnior

2006

Índice

Introdução

Um conceito fundamental na Lógica é aquele que diferencia os objetos de seu significado. Assim sendo, estudaremos a Semântica da Lógica Proposicional, onde associa-se a cada objeto sintático um significado.

Quando escrevermos uma fórmula do tipo ($P \land Q$), dependendo do significado de P e de Q esta fórmula será verdadeira ou falsa, tendo diferentes significados semânticos.

Por exemplo: se o P significa "Está chovendo" e Q representa "A rua está molhada" teremos um resultado verdadeiro (pelo fato de estarmos utilizando o conectivo $\land$) apenas quando P e Q forem verdadeiros.

Isto dependerá das condições climáticas atuais, que determinarão se as interpretações de P e Q serão verdadeiras ou falsas.

Esta interpretação será indicada por **I[P] = T** ou **I[P] = F** e por **I[Q] = T** ou **I[Q] = F.**

Interpretação

Antes de falarmos das interpretações é preciso termos sempre em mente os princípios da lógica proposicional: *Toda fórmula da lógica proposicional é associada a um valor **V** ou **F*** (*para verdadeiro ou falso, diferentes dos símbolos proposicionais true e false, princípio do terceiro excluído*); e *Nenhuma fórmula é simultaneamente verdadeira e falsa (princípio da não contradição)*.

A interpretação de uma fórmula é feita pela função de interpretação

$$\mathbf{I} : \textbf{\textit{Fórmulas}} \rightarrow \{\mathbf{T,F}\}$$

Onde:

- O domínio de I é constituído pelo conjunto das fórmulas da Lógica Proposicional;
- O contradomínio (resultados) de I $\in$ {T,F}
- O valor da interpretação dos símbolos de verdade da Lógica Proposicional é dado por I[*true*] = T e I[*false*] = F

Temos então a seguinte definição da interpretação de fórmulas:

Seja E uma fórmula da lógica proposicional, e I uma interpretação, então o significado I[E] é determinado pelas regras:

- E=P, onde P é um símbolo proposicional, então I[E] = I[P] e I[P] $\in$ {T,F}
- Se E=*true* então I[E] = I [*true*] = T. Se E=*false* então I[E] = I [*false*] = F.
- Seja H uma fórmula, se E = $\neg$ H, então I[E] = F se I[H] = T e I[E] = T se I[H] = F
- Sejam H e G duas fórmulas. Se E = ($H \lor G$) então
    - I[E] = T se I[H] = T e/ou I[G] = T
    - I[E] = F se I[H] = F e I[G] = F
- Sejam H e G duas fórmulas. Se E = ($H \land G$) então
    - I[E] = T se I[H] = T e I[G] = T
    - I[E] = F se I[H] = F e/ou I[G] = F
- Sejam H e G duas fórmulas. Se E = ($H \rightarrow G$) então
    - I[E] = T se I[H] = F e/ou I[G] = T
    - I[E] = F se I[H] = T e I[G] = F
- Sejam H e G duas fórmulas. Se E = ($H \leftrightarrow G$) então
    - I[E] = T se I[H] = I[G]
    - I[E] = F se I[H] $\neq$ I[G]

Portanto, dado um símbolo proposicional P, a interpretação de P pertence ao conjunto {T,F}, em outras palavras: $I[P] \in \{T,F\}$

No entanto, qual o valor de I[P]?

Isto dependerá ao que o símbolo P se refere. Se P significa: “Hoje é segunda-feira” e se hoje realmente for segunda-feira, então I[P]=T, caso contrário, I[P]=F.

Tabela da verdade

A partir da suposição de todas as possibilidades possíveis em uma interpretação de duas fórmulas teremos condições de montar uma tabela chamada **Tabela da Verdade**.

Exemplo: Sejam H e G duas fórmulas da Lógica Proposicional. Então teremos a seguinte tabela da verdade:

H	G	$\neg H$	$H \vee G$	$H \wedge G$	$H \rightarrow G$	$H \leftrightarrow G$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	F
F	F	T	F	F	T	T

Observação sobre o conectivo $\rightarrow$

Sempre devemos lembrar que um valor verdadeiro **NUNCA** poderá implicar a um valor falso, porém o contrário é totalmente admissível, ou seja, um valor falso poderá levar a qualquer outro valor (Verdadeiro ou Falso).

Demonstraremos no item a seguir estas observações.

Vamos mostrar um exemplo para demonstrar como obter os valores da tabela da verdade em uma interpretação de fórmula da lógica proposicional.

Considerando $\mathbf{H = ((\neg P) \vee Q) \rightarrow (Q \wedge P)}$ a tabela da verdade associada a H é:

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$Q \wedge P$	H
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	F	F

O resultado final de H é obtido a partir da comparação dos valores que temos em $\mathbf{\neg P \vee Q}$ e $\mathbf{Q \wedge P}$.

A definição dos significados dos conectivos $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$ estão diretamente ligados aos significados de “não”, “ou”, “e” e “se e somente se”. No entanto, para o símbolo $\rightarrow$ o significado não é tão fácil de ser concluído como “se...então”. Observaremos a análise do estudo do caso de $\rightarrow$

Significado do conectivo $\rightarrow$

Sejam H e G duas fórmulas. A fórmula $H \rightarrow G$ possui a seguinte tabela da verdade:

H	G	$H \rightarrow G$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Esta tabela foi obtida através de I[H $\rightarrow$ G].

Conforme a tabela, temos I[H $\rightarrow$ G] = T quando I[H] = T e I[G] = T, o que é razoável, pois, é verdadeiro que um enunciado verdadeiro implica em outro enunciado verdadeiro.

Segundo a tabela, na segunda linha, observamos que I[H $\rightarrow$ G] = F quando I[H] = T e I[G] = F, neste caso, é falso concluir um enunciado falso a partir de outro verdadeiro. Isso fica claro se atribuirmos, por exemplo, a H e G os significados de "hoje está chovendo" e "a rua está molhada". A implicação "Se hoje está chovendo então a rua está molhada" é verdadeira, pois se H é verdadeira - "hoje está chovendo" - então, intuitivamente e necessariamente, G é verdadeira - "a rua está molhada".

Caso ocorresse H verdadeira – "hoje está chovendo" – e G falsa – "a rua não está molhada" – então a implicação "se está chovendo então a rua está molhada" – seria uma implicação falsa. Neste caso, um enunciado falso é concluído a partir de outro verdadeiro, então a implicação utilizada deve ser falsa.

A análise da terceira e quarta linha da tabela que define I[H $\rightarrow$ G] não é tão direta como as acima discutidas. Nela temos I[H $\rightarrow$ G] = T, dado que I[H] = F, independente do valor de I[G]. Isto justifica porque a partir de um enunciado falso, podemos concluir qualquer outro resultado. Em outras palavras, a partir de um antecedente falso, concluímos fatos verdadeiros ou falsos. Portanto a interpretação torna-se verdadeira.

Para tornar mais claro, vamos aplicar outro exemplo bem mais prático

Vamos assumir para H o significado "x é um número real maior que 10" e para G "x^2 é um número real maior que 100"

Então continua valendo a tabela

H	G	H $\rightarrow$ G
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Pois podemos verificar com mais facilidade agora com o resultado das expressões matemáticas.

Se assumirmos os valores para x = 20 nas linhas 1 e 2 verificaremos que essas linhas são verdadeiras.

Porém se x = 5 nas linhas 3 e 4 podemos concluir o mesmo? X=5 então x^2 =25 e a linha 3 mostra que I[G] teria que ser verdadeira. Porém, podemos utilizar o valor -20 para exemplificar essa linha, que também é um valor real menor que 10. Então -20^2 = 400, o que torna a sentença verdadeira.

Casualidade e a semântica do conectivo $\rightarrow$

Pela definição das interpretações de fórmulas com o conectivo $\rightarrow$, se I[G] = T, então I[H $\rightarrow$ G] = T independente do valor de I[H]. Da mesma forma, se I[H] = F, então I[H $\rightarrow$ G] = T independente do valor de I[G], significa que o conectivo $\rightarrow$ não expressa a semântica da casualidade. Não é necessária a relação causa e efeito entre H e G para que se tenha I[H $\rightarrow$ G] = T.

Suponha por exemplo que G = "o sol é redondo" e que I seja uma interpretação razoável tal que I[G] = T. Neste caso, I[H $\rightarrow$ G] = T para qualquer enunciado que H possa assumir, até mesmo enunciados mais estranhos como P = "Maluf é honesto".

Portanto, concluímos que nesse caso, I[H $\rightarrow$ G] = T e que não há relação de causa e efeito entre H e G.

Suponha agora que H = “é possível dois corpos ocuparem o mesmo lugar no espaço”. Se I[H] = F, então I[H $\rightarrow$ G] = T para qualquer enunciado de G, como por exemplo G = “a lua é redonda”.

Neste caso, também não temos nenhuma relação de causa e efeito entre H e G em I[P $\rightarrow$ G].

Exemplos de interpretações de fórmulas

Considere a fórmula: H=(($\neg$P) $\vee$($\neg$Q)) $\rightarrow$R e uma interpretação dada por
I[P] = T, I[Q]=F, I[R]=T, I[S] = F

Para determinar o significado semântico de H conforme I, isto é, I[H], considere a tabela:

P	**Q**	**R**	**S**	**$\neg$P**	**$\neg$Q**	**$\neg$P$\vee$$\neg$Q**	**H**
T	F	T	F	F	T	T	T

Notamos que o resultado de I[H]=T. Para chegarmos a essa conclusão, realizamos, passo a passo, as interpretações das fórmulas semânticas. Inicialmente, interpretados os símbolos proposicionais, em seguida subfórmulas que ocorrem em H, até que finalmente obtém-se a interpretação de H.

Considere agora as fórmulas E=(($\neg$P) $\wedge$Q) $\rightarrow$(R$\vee$P) e H=(*false*$\rightarrow$P) e as interpretações I e J I[P]=T, I[Q]=F, I[R]=T, I[P_1]=F, J[P]=F, J[Q]=T, J[R]=F.

No caso, I interpreta E conforme a tabela:

P	**Q**	**R**	**$\neg$P**	**$\neg$P$\wedge$$\neg$Q**	**R$\vee$P**	**E**
T	F	T	F	F	T	T

e J interpreta E conforme a tabela

P	**Q**	**R**	**$\neg$P**	**$\neg$P$\wedge$Q**	**R$\vee$P**	**E**
F	T	F	T	T	F	F

Já em relação à interpretação da fórmula H, para qualquer que seja a interpretação (I ou J nesse caso) o resultado será I[H]=T, pois o antecedente nos dois casos é *false*.

Bibliografia

SOUZA, João Nunes. **Lógica para Ciência da Computação**. Campus, 2002. Capítulo 1.

HÜBNER, Jomi Fred – Lógica para Computação – FURB - http://www.inf.furb.br/~jomi, acessada em 12/02/2006 – Semântica da Lógica Proposicional