



Fundação Educacional de Ensino Superior de Frutal

Avenida Professor Mario Palmério nº 1000 – Bairro Universitário
38200-000 - FRUTAL - MG - Fone (34) 3423-9400
CNPJ. 06.172.537/0001-15 - Inscrição Municipal: 00113207-4

Campus Frutal



Curso de Sistemas de Informação

REVISÃO DE LÓGICA PROPOSICIONAL

Prof. Sérgio Carlos Portari Júnior

2006

ÍNDICE

| | |
|--|-----------|
| ÍNDICE..... | 2 |
| Proposição | 3 |
| Conectivos Lógicos | 4 |
| Valor Lógico (Interpretação) | 4 |
| Princípios Fundamentais da Lógica | 5 |
| Tabela - Verdade | 5 |
| Operação Negação (\neg) | 6 |
| Operação Conjunção (\wedge)..... | 7 |
| Operação Disjunção (\vee)..... | 8 |
| Operação Condicional (\rightarrow)..... | 10 |
| Operação Bicondicional (\leftrightarrow)..... | 11 |
| Tabela verdade resumo dos conectivos..... | 12 |
| Prioridade dos conectivos..... | 12 |
| Tautologia | 12 |
| Contradição | 13 |
| Implicação Lógica ou Consequência Lógica (\rightarrow) | 13 |
| Equivalência Lógica (\leftrightarrow)..... | 13 |
| Exercícios..... | 14 |
| BIBLIOGRAFIA..... | 15 |

Proposição

Frase é o elemento de comunicação que relaciona palavras entre si de modo a estabelecer uma mensagem com sentido completo.

As frases podem ser de vários tipos:

- Declarativa:** “O Sol é uma estrela.”
- Imperativa:** “Não faça isto!”
- Interrogativa:** “Onde você mora?”
- Exclamativa:** “Parabéns!”

A linguagem natural nem sempre é clara e precisa, sendo muito comum a ocorrência de ambigüidades que geram dúvidas sobre o significado do que se está falando.

Por isso, um dos objetivos da **lógica** é estabelecer uma **linguagem formal**, onde se pode expressar com **clareza**, **precisão** e emitir juízo de **verdadeiro** ou **falso** para determinadas frases.

Proposição é um conceito primitivo (aceito sem definição). Mas nada impede que se estabeleçam as suas características para melhor entendimento.

Proposição é uma frase **declarativa** (com sujeito e predicado), à qual pode ser atribuído, sem ambigüidade, um dos valores lógicos: **verdadeiro (T)** ou **falso (F)**.

Exemplos:

1) São proposições:

- a) O Japão fica na África.
- b) O Brasil é banhado pelo Oceano Atlântico.
- c) $3 + 4 = 7$
- d) $5 > 8$

2) Não São proposições:

- a) $3 + 4$ → Não tem predicado
- b) Onde você vai? → Sentença interrogativa.

As proposições podem ser **simples** ou **compostas**.

Proposição simples é única, ou seja, não contem nenhuma outra proposição como parte integrante. Indicaremos tais proposições por **letras minúsculas** de nosso alfabeto.

Exemplos:

- p:** O México fica na América do Norte.
- Q:** O número 16 é quadrado perfeito.

Proposição composta (fórmula) é formada por duas ou mais proposições relacionadas pelo conectivos lógicos. Serão indicadas por **letras maiúsculas** de nosso alfabeto.

Notação:

P (p,q,r,...) indica que a proposição composta **P** é formada pelas proposições simples **p, q, r, ...**

As proposições que fazem parte de uma proposição composta podem ser, elas mesmas, proposições compostas.

Exemplos:

P: $1 + 2 = 3 \text{ e } 2 \neq 1$

Q: $1 + 2 = 3 \text{ ou } 2 \neq 1$

R: Se $1 + 2 = 3$, então $2 \neq 1$

Conectivos Lógicos

Conectivos lógicos (ou operadores lógicos) são palavras ou expressões usadas para formar novas proposições a partir de proposições.

Os conectivos lógicos são:

- **Não** \neg
- **E** \wedge
- **Ou** \vee
- **se ..., então ...** \rightarrow
- **... se, e somente se ...** \leftrightarrow

Valor Lógico (Interpretação)

O valor de uma proposição é chamado **valor lógico**. Os valores lógicos possíveis são: **verdade (T)** e **falsidade (F)**.

Notação:

I[P] indica o valor lógico da proposição **P**. Assim, se a proposição **P** for **verdadeira**, **I[P] = T**; se a proposição **P** for **falsa**, **I[P] = F**.

O valor lógico de uma proposição composta depende exclusivamente dos valores lógicos das suas proposições componentes e dos conectivos lógicos que as ligam.

Exemplos:

a) **p:** O Sol é verde. $\rightarrow I[p] = F$

b) **q:** Um hexágono tem seis lados. $\rightarrow I[q] = T$

c) **r:** 2 é raiz da equação $x^2 + 3x - 4 = 0$ $\rightarrow I[r] = F$

Princípios Fundamentais da Lógica

Princípio da Não-Contradição

Uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa.

Princípio do Terceiro Excluído

Toda proposição ou é só verdadeira ou é só falsa, nunca ocorrendo um terceiro caso.

Logo, toda proposição admite um e um só dos valores T ou F.

Tabela - Verdade

Tabela-verdade é uma maneira prática de dispor organizadamente os valores lógicos envolvidos em uma proposição composta.

Para a proposição simples **p**, temos:

Tabela-Verdade de p

| <i>P</i> |
|-----------------|
| T |
| F |

Para proposições compostas, veremos que o número dos componentes simples determina o número de linhas das tabelas-verdade. A princípio, vamos construir as tabelas-verdade dispondo, apenas, **todas as possibilidades** de valores lógicos das proposições componentes; os possíveis valores lógicos das proposições compostas estudados mais adiante.

Proposição Composta por 2 Proposições Simples - $P(p,q)$

Tabela-Verdade

| <i>p</i> | <i>q</i> |
|-----------------|-----------------|
| T | F |
| T | T |
| F | F |
| F | T |

Proposição Composta por 3 Proposições Simples - $P(p,q,r)$

Tabela-Verdade

| p | Q | r |
|-----|-----|-----|
| T | T | T |
| T | T | F |
| T | F | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | T | F |
| F | F | T |
| F | F | F |

Teorema:

O **número de linhas** distintas de uma tabela-verdade é dado por 2^n , onde n é número de proposições simples componentes e 2 representa o número de valores lógicos possíveis (T ou F).

Operação Negação (\neg)

Se p é uma proposição, a **negação** da proposição p é denotada por $\neg p$ (lê-se **não p**).

- Se $I[p] = T$, então $I[\neg p] = F$
- Se $I[p] = F$, então $I[\neg p] = T$

Logo, a **negação** de uma proposição apresenta valor lógico **oposto** ao da proposição dada.

A **tabela-verdade** da operação **negação** é:

| p | $\neg p$ |
|-----|----------|
| T | F |
| F | T |

Exemplos:

1) Dada a proposição:

p : O Sol é um planeta.

A sua negação é:

$\neg p$: O Sol não é um planeta.

2) Dada a proposição:

q : $2 + 3 = 5$

a sua negação é:

$\neg q$: $2 + 3 \neq 5$

3) Dada a proposição:

r: Rio de Janeiro é um país.

A sua negação é:

$\neg r$: Rio de Janeiro não é um país.

A negação pode, ainda, ser expressa de outras maneiras, como: $\neg r$: Não é verdade que Rio de Janeiro é um país.

$\neg r$: É falso que Rio de Janeiro é um país.

*Negar uma proposição **p** não é apenas afirmar algo diferente do que **p** afirma, ou algo com valor lógico diferente.*

Exemplo:

*A proposição “O Sol é uma estrela”, que é verdadeira, **não é negação** da proposição “O Sol é um planeta”, que é falsa.*

Operação Conjuncção (\wedge)

Duas proposições **p** e **q** podem ser combinadas pelo conectivo **e** para formar uma proposição composta denominada **conjuncção** das proposições originais.

Notação: $p \wedge q$ (lê-se: **p e q**)

Exemplos:

1) Dada as proposições:

p: Carlos estuda Matemática.

q: Carlos joga xadrez.

A conjuncção é:

$p \wedge q$: Carlos estuda Matemática **e** joga xadrez.

2) Dadas as proposições:

p: $2 > 0$

q: $2 \neq 1$

a conjuncção é:

$p \wedge q$: $2 > 0$ **e** $2 \neq 1$

O símbolo \wedge pode ser usado, também, para definir a intersecção de dois conjuntos.

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$

A **conjuncção** de duas proposições ($p \wedge q$) é **verdadeira** se, e somente se, **cada** componente for **verdadeiro**.

A **tabela-verdade** da operação **conjunção** é:

| p | q | $p \wedge q$ |
|----------|----------|--------------------------------|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

OU

| p | \vee | q |
|----------|--------------------------|----------|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | F | T |
| F | F | F |

Operação Disjunção (V)

Duas proposições **p** e **q** podem ser combinadas pelo conectivo **ou** (com sentido de e/ou) para formar uma proposição composta denominada **disjunção** das proposições originais.

Notação: $p \vee q$ (lê-se: **p ou q**)

*Na linguagem natural, o conectivo **ou** pode traduzir tanto a idéia de hipóteses mutuamente exclusivas (ou ocorre isto ou ocorre aquilo) quanto a de que pelo menos uma das hipóteses ocorre.*

Exemplos:

1) A sentença “chove ou faz frio” é verdadeira nos seguintes casos:

- só chove;
- só faz frio;
- chove e faz frio.

2) O mesmo não acontece com a sentença “Pedro passará nos exames ou repetirá de ano”, que só é verdadeira nos seguintes casos:

- Pedro passará nos exames;
- Pedro repetirá de ano.

Mas é falsa a hipótese:

- Pedro passará nos exames e repetirá de ano.

No primeiro exemplo, a disjunção é **inclusiva** e, no segundo, a disjunção é **exclusiva**.

Em nosso estudo, vamos nos preocupar apenas com a **disjunção inclusiva**.

Exemplos:

1) Dadas as proposições:

p: João é estudante.

Q: João é mecânico.

A disjunção é:

$p \vee q$: João é estudante **ou** mecânico.

2) Dadas as proposições:

p : 10 é número primo

q : 10 é número composto

a disjunção é:

$p \vee q$: 10 é número primo **ou** número composto.

O símbolo \vee pode ser usado, também, para definir a união de dois conjuntos:

$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$

A **disjunção inclusiva** de duas proposições ($p \vee q$) é **falsa** se, e somente se, **todas** as componentes forem **falsas**.

A **tabela-verdade** da operação **disjunção** é:

| p | q | $p \vee q$ |
|---|---|------------|
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

Exemplos:

1) **Determinar o valor lógico da proposição composta P dada a seguir: P: $3 < \pi$ ou 2 não é número primo.**

Resolução:

“ $3 < \pi$ ” é uma proposição verdadeira.

“2 não é número primo” é uma proposição falsa.

Com as proposições simples dadas estão ligadas pelo conectivo **ou**, então: $I[P] = T$

2) **Sejam as proposições:**

p : Maurício é jogador de vôlei.

q : Maurício é bonito.

Escrever em linguagem natural as seguintes proposições:

a) $p \wedge q$ b) $p \vee \neg q$

Resolução:

a) Maurício é jogador de vôlei **e** Maurício é bonito.

b) Maurício é jogador de vôlei **ou** Maurício não é bonito.

3) **Construir a tabela-verdade para a proposição $p \vee \neg q$.**

Resolução:

| p | q | $\neg q$ | $p \vee \neg q$ |
|----------|----------|----------------------------|-----------------------------------|
| T | T | F | T |
| T | F | T | T |
| F | T | F | F |
| F | F | T | T |

Operação Condicional (\rightarrow)

Duas proposições **p** e **q** podem ser combinadas pelo conectivo lógico “se ..., então ...” para formar uma nova proposição denominada **condicional**.

Notação: $p \rightarrow q$ (lê-se: **se p, então q**).

Outras maneiras de se ler o condicional $p \rightarrow q$:

- q, se p.
- p é condição suficiente para q.
- q é condição necessária para p.
- p implica em q.

Exemplo:

A proposição condicional “Se chove, então a rua fica molhada”, também pode ser lida das seguintes formas:

Chover é uma condição suficiente para a rua ficar molhada.

A rua ficar molhada é uma condição necessária quando chove.

Chover implica na rua estar molhada.

No condicional $p \rightarrow q$, a proposição **p** é chamada **antecedente** e a proposição **q** é **conseqüente**.

Exemplos:

1) Dadas as proposições:

p: 1 litro = 1 dm³

q: 1 ml = 1 cm³

a condicional é:

$p \rightarrow q$: Se 1 l = 1 dm³, então 1 ml = 1 cm³.

2) Dadas as proposições:

p: Chove

q: Faz frio

a condicional é:

$p \rightarrow q$: Se chove, então faz frio.

3) Dadas as proposições:

p: 5 < 2

q: $2 \in \mathbb{Z}$

a condicional é:

$p \rightarrow q$: Se $5 < 2$, então $2 \in \mathbb{Z}$.

Obs.: O símbolo \mathbb{Z} representa o conjunto dos número inteiros.

A proposição condicional $p \rightarrow q$ só é **falsa** quando **p é verdadeira** e **q é falsa**. Caso isto não ocorra, a proposição condicional será verdadeira.

A **tabela-verdade** da operação **condicional** é:

| p | q | $p \rightarrow q$ |
|----------|----------|-------------------------------------|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

Operação Bicondicional (\leftrightarrow)

Duas proposições **p** e **q** podem ser combinadas pelo conectivo lógico “... se, e somente se ...” para formar uma nova proposição denominada **bicondicional**.

Notação: $p \leftrightarrow q$ (lê-se: **p se, e somente se q**)

Outras maneiras de se ler o bicondicional $p \leftrightarrow q$:

- p é condição necessária e suficiente para q.
- q é condição necessária e suficiente para p.

Exemplos:

1) Dadas as proposições:

p: Perereca se transforma em sapo.

Q: Sapo se transforma em príncipe.

A bicondicional é:

$p \leftrightarrow q$: Perereca se transforma em sapo se, e somente se, sapo se transforma em príncipe.

2) Dadas as proposições:

p: João é homem.

q: João tem a voz grave.

A bicondicional é:

$p \leftrightarrow q$: João é homem se, e somente se, João tem a voz grave.

A proposição bicondicional $p \leftrightarrow q$ só é **verdadeira** quando **I[p] = I[q]**, caso contrário é falsa.

A **tabela-verdade** da operação **bicondicional** é:

| p | q | $p \leftrightarrow q$ |
|----------|----------|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | T |

Tabela verdade resumo dos conectivos

| P | q | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $\neg p$ | $p \rightarrow q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|----------|----------|--------------------------------|------------------------------|----------------------------|-------------------------------------|---|
| T | T | T | T | F | T | T |
| T | F | F | T | F | F | F |
| F | T | F | T | T | T | F |
| F | F | F | F | F | T | T |

Prioridade dos conectivos

a) Parênteses

Usar parênteses em todas as fórmulas indicando assim a prioridade das subfórmulas.

$$(((\neg p) \vee q) \rightarrow ((r \wedge \neg q) \leftrightarrow p))$$

Quando o significado for claro podemos simplificar o uso de parênteses.

b) Tabela abaixo

$$(\neg) > (\wedge) > (\vee) > (\rightarrow) > (\leftrightarrow)$$

Tautologia

Uma proposição composta é uma **tautologia** quando o seu valor lógico é **sempre verdade (T)**, quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições componentes.

Exemplos:

p: Chove

$\neg p$: Não chove

$$(p \vee \neg p)$$

A tabela-verdade é:

| p | $\neg p$ | $p \vee \neg p$ |
|----------|----------------------------|-----------------------------------|
| T | F | T |
| F | T | T |

Logo, $(p \vee \neg p)$ é uma tautologia.

Contradição

Uma proposição composta é uma **contradição** quando o seu valor lógico é **sempre a falsidade (F)**, quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições componentes.

Exemplo:

p : Chove

$\neg p$: Não chove

$(p \wedge \neg p)$

A tabela-verdade é:

| p | $\neg p$ | $p \wedge \neg p$ |
|-----|----------|-------------------|
| T | F | F |
| F | T | F |

Logo, $(p \vee \neg p)$ é uma tautologia.

Implicação Lógica ou Conseqüência Lógica (\rightarrow)

Dadas as proposições compostas **P** e **Q**, diz-se que ocorre uma **implicação lógica** (ou relação de implicação) entre **P** e **Q** quando a proposição condicional $P \rightarrow Q$ é uma **tautologia**.

Notação: $P \rightarrow Q$ (lê-se: “**P implica Q**”).

Exemplo:

Mostrar que $(p \wedge q) \rightarrow p$.

| p | q | $p \wedge q$ | $(p \wedge q) \rightarrow p$ |
|-----|-----|--------------|------------------------------|
| T | T | T | T |
| T | F | F | T |
| F | T | F | T |
| F | F | F | T |

Como $(p \wedge q) \rightarrow p$ é uma tautologia, então $(p \wedge q) \rightarrow p$, isto é, ocorre a implicação lógica.

Equivalência Lógica (\leftrightarrow)

Dadas as proposições compostas **P** e **Q**, diz-se que ocorre uma **equivalência lógica** entre **P** e **Q** quando suas tabelas-verdade forem **idênticas**.

Notação: $P \leftrightarrow Q$ (lê-se: “**P é equivalente a Q**”) Intuitivamente, proposições logicamente equivalentes transmitem a mesma informação, a mesma idéia, a partir das mesmas proposições componentes.

Exemplo:

Mostrar que $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ e $p \leftrightarrow q$ são equivalentes.

| p | q | $p \rightarrow q$ | $q \rightarrow p$ | $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|-------------------|-------------------|--|-----------------------|
| T | T | T | T | T | T |
| T | F | F | T | F | F |
| F | T | T | F | F | F |
| F | F | T | T | T | T |

Logo, $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

Exemplo:

Mostrar que $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$.

Analisemos a tabela-verdade envolvendo as seguintes proposições:

| A | | | B | | | $\neg B$ | |
|---|---|--------------|----------|----------|----------------------|----------------------------|----------------------------|
| p | q | $p \wedge q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $\neg p \vee \neg q$ | $\neg(\neg p \vee \neg q)$ | $A \leftrightarrow \neg B$ |
| T | T | T | F | F | F | T | T |
| T | F | F | F | T | T | F | T |
| F | T | F | T | F | T | F | T |
| F | F | F | T | T | T | F | T |

Como $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$ é uma tautologia, então $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$, isto é, ocorre a equivalência lógica.

Exercícios

Dadas as proposições a seguir, monte a expressão e a tabela verdade correspondente:

- 1 - a) Está chovendo
b) Está frio
- 2 - a) João vai viajar
b) Maria vai viajar
c) Se Maria viajar ao lado de João, João ficará feliz
- 3 - a) João vai viajar se Maria for
b) Maria vai viajar se João for
c) Maria vai viajar se Mario for
d) Mario vai viajar se Carlos ou Maria for

4. Dadas as expressões abaixo, monte as tabelas verdade

- a) $p \wedge (q \rightarrow r) \vee (p \vee q)$
- b) $(p \rightarrow q) \wedge (r \leftrightarrow q) \vee (p \wedge r)$
- c) $((p \leftrightarrow \neg p) \wedge \neg(q \vee r)) \rightarrow (\neg q \wedge r) \vee s$

Dadas as proposições abaixo, diga se ela é uma Tautologia ou Contradição ou nenhuma das alternativas;

5. $(p \wedge \neg p) \wedge p$

6. $(p \wedge \neg q) \wedge p$

7. $(p \wedge \neg p) \vee q$

8. $(q \wedge \neg p) \wedge r$

9. $p \wedge (q \rightarrow r) \vee (p \vee q)$

10. Verifique se os pares de fórmulas abaixo são equivalências lógicas ou implicações lógicas.

a) $(p \wedge q)$ e q

b) $\neg(p \wedge q)$ e $(\neg p \vee \neg q)$

c) $(\neg p \vee q)$ e $(p \rightarrow q)$

BIBLIOGRAFIA

SOUZA, João Nunes. **Lógica para Ciência da Computação**. Campus, 2002. Capítulos 1 a 4.

EGYPTO, Cândido. **Introdução à programação**. Apostila da Asper – Associação Paraibana de Ensino Renovado, 2004.

ALVES, João Bosco da Mota - Circuitos Lógicos – UFSC - <http://www.inf.ufsc.br/ine5365/introlog.html>, acessada em 12/02/2006 – Lógica Proposicional

HÜBNER, Jomi Fred – Lógica para Computação – FURB - <http://www.inf.furb.br/~jomi>, acessada em 12/02/2006 – Semântica da Lógica Proposicional

COSTA, Renato da – **Introdução à Lógica de Programação** – Curso Técnico em Processamento de Dados - <http://www.renatodacosta.cjb.net>, acessada em 10/10/1998.

MAZER Jr., Ademir – **Introdução à Lógica de Computação** – Curso Técnico em Informática - SENAI de PONTA GROSSA - <http://www.pr.senai.br/unidades/camposgerais/pontagrossa/>, acessada em 16/07/2003.