



Fundação Educacional de Ensino Superior de Frutal

Avenida Professor Mario Palmério nº 1000 – Bairro Universitário
38200-000 - FRUTAL - MG - Fone (34) 3423-9400
CNPJ. 06.172.537/0001-15 - Inscrição Municipal: 00113207-4



Campus Frutal

Curso de Sistemas de Informação

Semântica da Lógica Proposicional

Prof. Sérgio Carlos Portari Júnior

2006

Índice

Índice.....	1
Introdução.....	2
Interpretação	2
Tabela da verdade.....	3
Significado do conectivo →	3
Casualidade e a semântica do conectivo →	4
Exemplos de interpretações de fórmulas	5
Bibliografia	5

Introdução

Um conceito fundamental na Lógica é aquele que diferencia os objetos de seu significado. Assim sendo, estudaremos a Semântica da Lógica Proposicional, onde associa-se a cada objeto sintático um significado.

Quando escrevermos uma fórmula do tipo $(P \wedge Q)$, dependendo do significado de P e de Q esta fórmula será verdadeira ou falsa, tendo diferentes significados semânticos.

Por exemplo: se o P significa “Está chovendo” e Q representa “A rua está molhada” teremos um resultado verdadeiro (pelo fato de estarmos utilizando o conectivo \wedge) apenas quando P e Q forem verdadeiros.

Isto dependerá das condições climáticas atuais, que determinarão se as interpretações de P e Q serão verdadeiras ou falsas.

Esta interpretação será indicada por $I[P] = T$ ou $I[P] = F$ e por $I[Q] = T$ ou $I[Q] = F$.

Interpretação

Antes de falarmos das interpretações é preciso termos sempre em mente os princípios da lógica proposicional: *Toda fórmula da lógica proposicional é associada a um valor V ou F (para verdadeiro ou falso, diferentes dos símbolos proposicionais true e false, princípio do terceiro excluído); e Nenhuma fórmula é simultaneamente verdadeira e falsa (princípio da não contradição).*

A interpretação de uma fórmula é feita pela função de interpretação

$$I : \text{Fórmulas} \rightarrow \{T,F\}$$

Onde:

- O domínio de I é constituído pelo conjunto das fórmulas da Lógica Proposicional;
- O contradomínio (resultados) de $I \in \{T,F\}$
- O valor da interpretação dos símbolos de verdade da Lógica Proposicional é dado por $I[\text{true}] = T$ e $I[\text{false}] = F$

Temos então a seguinte definição da interpretação de fórmulas:

Seja E uma fórmula da lógica proposicional, e I uma interpretação, então o significado $I[E]$ é determinado pelas regras:

- $E=P$, onde P é um símbolo proposicional, então $I[E] = I[P]$ e $I[P] \in \{T,F\}$
- Se $E=\text{true}$ então $I[E] = I[\text{true}] = T$. Se $E=\text{false}$ então $I[E] = I[\text{false}] = F$.
- Seja H uma fórmula, se $E = \neg H$, então $I[E] = F$ se $I[H] = T$ e $I[E] = T$ se $I[H] = F$
- Sejam H e G duas fórmulas. Se $E = (H \vee G)$ então
 - $I[E] = T$ se $I[H] = T$ e/ou $I[G] = T$
 - $I[E] = F$ se $I[H] = F$ e $I[G] = F$
- Sejam H e G duas fórmulas. Se $E = (H \wedge G)$ então
 - $I[E] = T$ se $I[H] = T$ e $I[G] = T$
 - $I[E] = F$ se $I[H] = F$ e/ou $I[G] = F$
- Sejam H e G duas fórmulas. Se $E = (H \rightarrow G)$ então
 - $I[E] = T$ se $I[H] = F$ e/ou $I[G] = T$
 - $I[E] = F$ se $I[H] = T$ e $I[G] = F$
- Sejam H e G duas fórmulas. Se $E = (H \leftrightarrow G)$ então
 - $I[E] = T$ se $I[H] = I[G]$
 - $I[E] = F$ se $I[H] \neq I[G]$

Portanto, dado um símbolo proposicional P, a interpretação de P pertence ao conjunto {T,F}, em outras palavras: $I[P] \in \{T,F\}$

No entanto, qual o valor de $I[P]$?

Isto dependerá ao que o símbolo P se refere. Se P significa: “Hoje é segunda-feira” e se hoje realmente for segunda-feira, então $I[P]=T$, caso contrário, $I[P]=F$.

Tabela da verdade

A partir da suposição de todas as possibilidades possíveis em uma interpretação de duas fórmulas teremos condições de montar uma tabela chamada **Tabela da Verdade**.

Exemplo: Sejam H e G duas fórmulas da Lógica Proposicional. Então teremos a seguinte tabela da verdade:

H	G	$\neg H$	$H \vee G$	$H \wedge G$	$H \rightarrow G$	$H \leftrightarrow G$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	F
F	F	T	F	F	T	T

Observação sobre o conectivo \rightarrow

Sempre devemos lembrar que um valor verdadeiro **NUNCA** poderá implicar a um valor falso, porém o contrário é totalmente admissível, ou seja, um valor falso poderá levar a qualquer outro valor (Verdadeiro ou Falso).

Demonstraremos no item a seguir estas observações.

Vamos mostrar um exemplo para demonstrar como obter os valores da tabela da verdade em uma interpretação de fórmula da lógica proposicional.

Considerando $H = ((\neg P) \vee Q) \rightarrow (Q \wedge P)$ a tabela da verdade associada a H é:

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$Q \wedge P$	H
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	F	F

O resultado final de H é obtido a partir da comparação dos valores que temos em $\neg P \vee Q$ e $Q \wedge P$.

A definição dos significados dos conectivos \neg , \vee , \wedge , \leftrightarrow estão diretamente ligados aos significados de “não”, “ou”, “e” e “se e somente se”. No entanto, para o símbolo \rightarrow o significado não é tão fácil de ser concluído como “se...então”. Observaremos a análise do estudo do caso de \rightarrow

Significado do conectivo \rightarrow

Sejam H e G duas fórmulas. A fórmula $H \rightarrow G$ possui a seguinte tabela da verdade:

H	G	$H \rightarrow G$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Esta tabela foi obtida através de $I[H \rightarrow G]$.

Conforme a tabela, temos $I[H \rightarrow G] = T$ quando $I[H] = T$ e $I[G] = T$, o que é razoável, pois, é verdadeiro que um enunciado verdadeiro implica em outro enunciado verdadeiro.

Segundo a tabela, na segunda linha, observamos que $I[H \rightarrow G] = F$ quando $I[H] = T$ e $I[G] = F$, neste caso, é falso concluir um enunciado falso a partir de outro verdadeiro. Isso fica claro se atribuirmos, por exemplo, a H e G os significados de “hoje está chovendo” e “a rua está molhada”. A implicação “Se hoje está chovendo então a rua está molhada” é verdadeira, pois se H é verdadeira - “hoje está chovendo” - então, intuitivamente e necessariamente, G é verdadeira - “a rua está molhada”.

Caso ocorresse H verdadeira – “hoje está chovendo” – e G falsa – “a rua não está molhada” – então a implicação “se está chovendo então a rua está molhada” – seria uma implicação falsa. Neste caso, um enunciado falso é concluído a partir de outro verdadeiro, então a implicação utilizada deve ser falsa.

A análise da terceira e quarta linha da tabela que define $I[H \rightarrow G]$ não é tão direta como as acima discutidas. Nela temos $I[H \rightarrow G] = T$, dado que $I[H] = F$, independente do valor de $I[G]$. Isto justifica porque a partir de um enunciado falso, podemos concluir qualquer outro resultado. Em outras palavras, a partir de um antecedente falso, concluímos fatos verdadeiros ou falsos. Portanto a interpretação torna-se verdadeira.

Para tornar mais claro, vamos aplicar outro exemplo bem mais prático

Vamos assumir para H o significado “x é um número real maior que 10” e para G “ x^2 é um número real maior que 100”

Então continua valendo a tabela

H	G	$H \rightarrow G$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Pois podemos verificar com mais facilidade agora com o resultado das expressões matemáticas.

Se assumirmos os valores para $x = 20$ nas linhas 1 e 2 verificaremos que essas linhas são verdadeiras.

Porém se $x = 5$ nas linhas 3 e 4 podemos concluir o mesmo? $X=5$ então $x^2 = 25$ e a linha 3 mostra que $I[G]$ teria que ser verdadeira. Porém, podemos utilizar o valor -20 para exemplificar essa linha, que também é um valor real menor que 10. Então $-20^2 = 400$, o que torna a sentença verdadeira.

Casualidade e a semântica do conectivo \rightarrow

Pela definição das interpretações de fórmulas com o conectivo \rightarrow , se $I[G] = T$, então $I[H \rightarrow G] = T$ independente do valor de $I[H]$. Da mesma forma, se $I[H] = F$, então $I[H \rightarrow G] = T$ independente do valor de $I[G]$, significa que o conectivo \rightarrow não expressa a semântica da casualidade. Não é necessária a relação causa e efeito entre H e G para que se tenha $I[H \rightarrow G] = T$.

Suponha por exemplo que G = “o sol é redondo” e que I seja uma interpretação razoável tal que $I[G] = T$. Neste caso, $I[H \rightarrow G] = T$ para qualquer enunciado que H possa assumir, até mesmo enunciados mais estranhos como P = “Maluf é honesto”.

Portanto, concluímos que nesse caso, $I[H \rightarrow G] = T$ e que não há relação de causa e efeito entre H e G.

Suponha agora que $H = \text{“é possível dois corpos ocuparem o mesmo lugar no espaço”}$. Se $I[H] = F$, então $I[H \rightarrow G] = T$ para qualquer enunciado de G , como por exemplo $G = \text{“a lua é redonda”}$.

Neste caso, também não temos nenhuma relação de causa e efeito entre H e G em $I[P \rightarrow G]$.

Exemplos de interpretações de fórmulas

Considere a fórmula: $H = ((\neg P) \vee (\neg Q)) \rightarrow R$ e uma interpretação dada por $I[P] = T$, $I[Q] = F$, $I[R] = T$, $I[S] = F$

Para determinar o significado semântico de H conforme I , isto é, $I[H]$, considere a tabela:

P	Q	R	S	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	H
T	F	T	F	F	T	T	T

Notamos que o resultado de $I[H] = T$. Para chegarmos a essa conclusão, realizamos, passo a passo, as interpretações das fórmulas semânticas. Inicialmente, interpretados os símbolos proposicionais, em seguida subfórmulas que ocorrem em H , até que finalmente obtém-se a interpretação de H .

Considere agora as fórmulas $E = ((\neg P) \wedge Q) \rightarrow (R \vee P)$ e $H = (\text{false} \rightarrow P)$ e as interpretações I e J $I[P] = T$, $I[Q] = F$, $I[R] = T$, $I[P_1] = F$, $J[P] = F$, $J[Q] = T$, $J[R] = F$.

No caso, I interpreta E conforme a tabela:

P	Q	R	$\neg P$	$\neg P \wedge Q$	$R \vee P$	E
T	F	T	F	F	T	T

e J interpreta E conforme a tabela

P	Q	R	$\neg P$	$\neg P \wedge Q$	$R \vee P$	E
F	T	F	T	T	F	F

Já em relação à interpretação da fórmula H , para qualquer que seja a interpretação (I ou J nesse caso) o resultado será $I[H] = T$, pois o antecedente nos dois casos é *false*.

Bibliografia

SOUZA, João Nunes. **Lógica para Ciência da Computação**. Campus, 2002. Capítulo 2.

HÜBNER, Jomi Fred – Lógica para Computação – FURB - <http://www.inf.furb.br/~jomi>, acessada em 12/02/2006 – Semântica da Lógica Proposicional