Fundação Educacional de Ensino Superior de Frutal
Avenida Professor Mario Palmério nº 1000 – Bairro Universitário
38200-000 - FRUTAL - MG - Fone (34) 3423-9400
CNPJ. 06.172.537/0001-15 - Inscrição Municipal: 00113207-4
Campus Frutal

Curso de Sistemas de Informação

Métodos para determinação da validade de fórmulas da Lógica Proposicional

Prof. Sérgio Carlos Portari Júnior

2006

Índice

Introdução

Um dos passos frequentemente utilizados no estudo da lógica proposicional corresponde à análise dos mecanismos que produzam ou verifiquem os argumentos válidos representados na linguagem da lógica. Iremos analisar nesse capítulo três métodos de determinação da validade de fórmulas da Lógica Proposicional: **Tabela da Verdade**, **Árvore Semântica** e **Negação ou Absurdo**.

Esses métodos se equivalem em muitos aspectos, entretanto, dependendo da fórmula, há métodos mais ou menos eficientes para a determinação de sua validade.

Propriedades semânticas da Lógica Proposicional

Para iniciarmos nosso estudo, veremos rapidamente algumas propriedades semânticas da Lógica Proposicional, que são propriedades que relacionam os resultados das interpretações das fórmulas. Possui também a denominação de Teoria dos Modelos.

As propriedades semânticas são definidas a partir das seguintes regras:

Propriedades semânticas básicas:

- Uma fórmula H é uma **tautologia** ou *válida* <u>se e somente se</u> para toda interpretação I, **I[H] = T**.
  Exemplo: $H = P \vee \neg P$
- Uma fórmula H é **factível** ou *satisfatível* <u>se e somente se</u> existe pelo menos uma interpretação I tal que **I[H] = T**.
  Exemplo: $H = P \vee Q$ (I[P] = T e I[Q] = F, J[P] = F e J[P] = F)
- Uma fórmula H é **contraditória** <u>se e somente se</u> para toda interpretação I, **I[H] = F**.
  Exemplo: $H = (P \wedge \neg P)$ Como I[P] será falsa ao mesmo tempo que $I[\neg P]$?
- Duas fórmulas H e G, **H implica em G** <u>se e somente se</u> para toda interpretação I, <u>se</u> **I[H] = T** <u>então</u> **I[G] = T**.
- Duas fórmulas H e G, **H equivale a G** <u>se e somente se</u> para toda interpretação I, se **I[H] = I[G]**.
- Dada uma fórmula H e uma interpretação I, então I **satisfaz** H <u>se e somente se</u> **I[H] = T**.
- Um conjunto $\beta = \{H_1, H_2, H_3, ..., H_n\}$ é **satisfatível** <u>se e somente se</u> existe uma interpretação I tal que $\mathbf{I[H_1] = I[H_2] = I[H_3] = ... = I[H_n] = T}$. Neste caso, I satisfaz o conjunto de fórmulas, o que é indicado por $I[\beta] = T$.
- Dado um conjunto de fórmulas vazio, então toda interpretação **I** satisfaz esse conjunto.

Método da Tabela Verdade

O método da tabela da verdade já foi demonstrado anteriormente. Nada mais é do que um método de força bruta ou *brute force* onde dada uma fórmula H suponha que P_1, P_2, ..., P_n sejam seus símbolos proposicionais. Nesse método, são consideradas todas as possibilidades de valores de verdade associados a esses símbolos proposicionais. A primeira linha da tabela é definida pelos símbolos

P_1	P_2	...	P_n	H

As outras linhas são preenchidas com todas as possíveis combinações de valores da verdade dos símbolos proposicionais. Assim, para determinar a validade de H, são consideradas todas as possibilidades $I[P_i] = T$ ou $I[P_i] = F$ onde $1 \leq i \leq n$. Se H possui n símbolos proposicionais, ocorrem 2^n possibilidades, por isso nem sempre indicado para fórmulas com muitos símbolos proposicionais.

Exemplo:

Lei de Morgan diz que $H = \neg (P \wedge Q) \leftrightarrow ((\neg P) \vee (\neg Q))$ é uma tautologia.

Essa lei define uma regra para distribuição do conectivo $\neg$ em uma conjunção. Observe que o conectivo $\wedge$ transforma-se em $\vee$. Veja a tabela da verdade de H

P	Q	$\neg (P \wedge Q)$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$	H
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Observe que se I[P] = T e I[Q] = T, então $I[\neg (P \wedge Q)] = F$ e $I[(\neg P) \vee (\neg Q)] = F$, como $H = \neg (P \wedge Q) \leftrightarrow ((\neg P) \vee (\neg Q))$ então I[H] = T

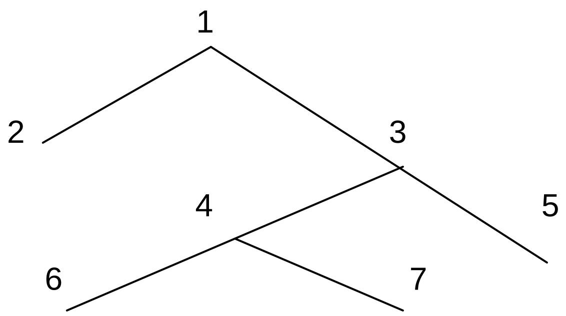
Se observarmos a coluna da tabela em H, veremos que para qualquer I[H] temos I[H]=T mostrando que é uma tautologia. Além disso, dizemos que $\neg (P \wedge Q)$ equivale a $(\neg P) \vee (\neg Q)$, pois as colunas das duas fórmulas sempre tem o mesmo resultado interpretado.

Imaginem se tivéssemos que utilizar pelo método da Tabela da Verdade a fórmula seguinte: $H = P_1 \rightarrow ((P_2 \wedge P_3) \rightarrow ((P_4 \wedge P_5) \rightarrow ((P_6 \wedge P_7) \rightarrow P_8)))$

Manualmente seria inviável faze-lo, pois $2^8 = 256$ interpretações. Por isso, para cada caso devemos procurar um método adequado de método para verificação da validade de uma fórmula proposicional, não sendo suficiente conhecermos apenas um método.

Método da Árvore Semântica

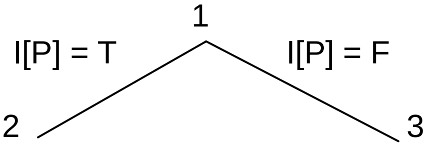
Esse método determina a validade de uma fórmula a partir da estrutura de dados denominada árvore. Uma árvore é um conjunto de nós ou vértices ligados por arestas conforme indicado pela figura abaixo, onde são rotulados por números inteiros. Os nós finais 2,6,7 e 5 são denominados folhas e o nó 1 raiz da árvore.



Exemplo:

Vamos demonstrar que a fórmula $H = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\neg Q) \rightarrow (\neg P))$ é uma tautologia (essa fórmula é a lei da contraposição).

Iniciaremos começando a desenhar nossa árvore a partir da raiz:



Nessa figura observamos que as arestas são denominadas por I[P] = T e I[P] = F, que são as possibilidades de o valor verdade para P.

O Nó numero 2 corresponde à fórmula:

Nó 2 = $(P \to Q) \leftrightarrow ((\neg Q) \to (\neg P))$
T T

O significado de P é colocado abaixo de seu símbolo. A partir desse significado, podemos obter o significado de $(\neg P)$:

Nó 2 = $(P \to Q) \leftrightarrow ((\neg Q) \to (\neg P))$
T FT

Análogo a isso, o nó de número 3 (onde supomos I[P] = F fica assim:

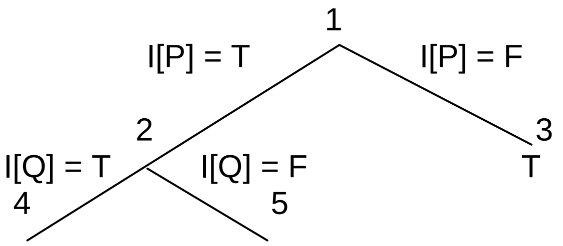
Nó 3 = $(P \to Q) \leftrightarrow ((\neg Q) \to (\neg P))$
F T F

E pelas leis da semântica, obtemos apenas com o significado de I[P] = F que o resultado dessa fórmula é T (representado abaixo do conectivo $\leftrightarrow$):

Nó 3 = $(P \to Q) \leftrightarrow ((\neg Q) \to (\neg P))$
F T **T** T T F

Pois F implicado em qualquer coisa é T e qualquer coisa que implica em T também é T.

Agora que achamos que o nó 3 é uma folha da árvore, continuamos a desenvolver nossa árvore supondo os valores de I[Q] no nó 2.



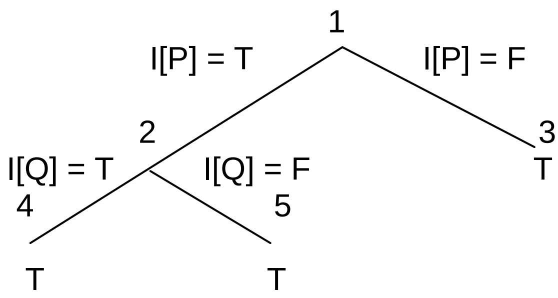
Continuamos então nossa análise:

Nó 4 = $(P \to Q) \leftrightarrow ((\neg Q) \to (\neg P))$
T T T **T** F T T F T

Neste caso, todos os significados estão determinados, Um símbolo T abaixo do conectivo $\leftrightarrow$ significa que a fórmula H é verdadeira quando P e Q são verdadeiros. O Símbolo semântico T é escrito abaixo da folha (ou nó) 4 na árvore semântica.

Nó 5 = $(P \to Q) \leftrightarrow ((\neg Q) \to (\neg P))$
T F F T T F F F T

Novamente, abaixo do conectivo $\leftrightarrow$ é escrito o símbolo semântico T que também será transferido para baixo da folha (ou nó) 5 de nossa árvore, que ficará completa como na figura abaixo:



Concluímos então que ($P \to Q$) equivale a ($\neg Q \to \neg P$) e ainda que P implica em Q se e somente se $\neg$ Q implica em $\neg$ P.

Observe que se as folhas das arestas são todas T, significa que temos uma tautologia.

Se elas estivessem todas rotuladas com F, então a fórmula seria contraditória e se pelo menos uma tivesse T, então ela seria satisfatível.

Método da Negação ao Absurdo

Nesse método, é considerada inicialmente a negação daquilo que se quer demonstrar. Assim sendo, se quiser demonstrar que H é uma tautologia, teremos que supor que H **não** é uma tautologia. A partir dessa suposição, é utilizado um conjunto de deduções para concluir o fato contraditório ou absurdo. Em outras palavras, se a suposição inicial diz que H não é uma tautologia e após uma seqüência de deduções é concluído um absurdo, então a não-validade de H é um absurdo, concluindo que H é uma tautologia. Esse método também é conhecido como método da refutação.

Exemplo:

Vamos demonstrar que a lei de transitividade é uma tautologia:

$H = ((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$

A demonstração da validade dessa fórmula H pelo método da negação ou absurdo seguiria os seguintes passos: Suponha que H não é uma tautologia. Logo é possível interpretar que I[H] = F em pelo menos uma interpretação. Nossa suposição terá a seguinte notação:

$H = ((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$
F

Como I[H] = F então, a única forma possível de ser possível seria quando o antecedente de H for verdadeiro e o conseqüente for falso, assim sendo:

$H = ((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$
T F F

A partir desses valores de verdade, podemos chegar aos valores das subfórmulas:

$H = ((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$
T T T F T F F

Nesse ponto concluímos que I[P] = T e I[R] = F, distribuímos esses valores pela fórmula.

$H = ((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$
T T T T F F T F F

Observe que nessa fórmula existem duas subfórmulas $(P \to Q)$ e $(Q \to R)$
T T T F

A partir da primeira subfórmula, o resultado de I[Q] é concluído como T. Entretanto, é concluído que pela segunda subfórmula, o resultado de I[Q] = F. Portanto, temos um absurdo, onde o valor de Q não pode ser interpretado simultaneamente como T e F.

Isto posto, temos que a suposição inicial é falsa, isto é, não existe interpretação de I tal que I[H] = F. Não é possível ter interpretação falsa de H.Logo, H é uma tautologia.

Bibliografia

SOUZA, João Nunes. **Lógica para Ciência da Computação**. Campus, 2002. Capítulos 3 e 4.