FESF
FUNDAÇÃO EDUCACIONAL DE ENSINO SUPERIOR DE FRUTAL

Fundação Educacional de
Ensino Superior de Frutal
Avenida Professor Mario Palmério nº 1000 – Bairro Universitário
38200-000 - FRUTAL - MG - Fone (34) 3423-9400
CNPJ. 06.172.537/0001-15 - Inscrição Municipal: 00113207-4
Campus Frutal

UEMG
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MINAS GERAIS

Curso de Sistemas de Informação

Introdução à Lógica Proposicional

Prof. Sérgio Carlos Portari Júnior

2006

Índice

Introdução

Definição: toda proposição é uma frase, mas nem toda frase é uma proposição; uma frase é uma proposição apenas quando admite um dos dois valores lógicos: ***Falso*** *(**F**) ou* ***Verdadeiro*** (**V**). Exemplos:

1. **Frases que não são proposições**
   - Pare!
   - Quer uma xícara de café?
   - Eu não estou bem certo se esta cor me agrada
2. **Frases que são proposições**
   - A lua é o único satélite do planeta terra (V)
   - A cidade de Salvador é a capital do estado do Amazonas (F)
   - O numero 712 é ímpar (F)
   - Raiz quadrada de dois é um número irracional (V)

Podemos dizer que, assim como na língua portuguesa, nós temos letras, pontuação, frases, na lógica proposicional as definições são muito semelhantes.

Alfabeto

O alfabeto na linguagem de lógica proposicional é definido da seguinte forma:

- Símbolos de pontuação: (,)
- Símbolos de verdade: *true, false*
- Símbolos proposicionais: P, Q, R, S, P_1, Q_1, R_1, S_1, P_2, Q_2, R_2, S_2, ...
- Conectivos proposicionais: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Observe que:

a. O alfabeto da linguagem de lógica proposicional é constituído de infinitos símbolos, diferente da língua portuguesa (que tem apenas 27 símbolos);

b. Os símbolos de pontuação são apenas os parênteses (e);

c. Os símbolos de verdade são as palavras da língua inglesa *true* e *false*, que devem ser consideradas apenas símbolos, não palavras;

d. Os símbolos proposicionais são heranças da matemática e possuem os seguintes significados:

1. Negação ou não = $\neg$
2. Ou = $\vee$
3. E = $\wedge$
4. Se, então (implica) = $\rightarrow$
5. Se, somente se = $\leftrightarrow$

Essa notação pode ser diferente, de acordo com a vontade de autores e editores. Essa notação era a adotada pela SBC (Sociedade Brasileira de Computação) em 2002.

Fórmulas

As fórmulas na lógica proposicional são formadas pela concatenação de símbolos do alfabeto. Porém, como na língua portuguesa, não é qualquer aglomerado de símbolos que formam uma palavra, na lógica proposicional não é qualquer seqüência de símbolos que formam uma fórmula. As fórmulas são definidas de acordo com as seguintes regras:

- Todo símbolo de verdade é uma fórmula (*true, false)*;
- Todo símbolo proposicional é uma fórmula (P, Q, ...);
- Se H é uma fórmula, então ($\neg$H) também é uma fórmula. (Lê-se Negação de H)
- Se H e G são fórmulas, então a disjunção das fórmulas H e G também é uma fórmula (H $\vee$ G) (Lê-se H ou G)
- Se H e G são fórmulas, então a conjunção das fórmulas H e G também é uma fórmula (H $\wedge$ G). (Lê-se H e G)
- Se H e G são fórmulas, então (H $\rightarrow$ G) é uma fórmula. Nesse caso, H é o antecedente e G é o conseqüente da fórmula. (Lê-se Se H então G)
- Se H e G são fórmulas, então (H $\leftrightarrow$ G) é uma fórmula. Nesse caso, H é o lado esquerdo e G é o lado direito da fórmula. (Lê-se H se e somente se G)

- Exemplos de construção de fórmulas:

Pela definição, podemos constatar que P, Q e true são fórmulas. Então, poderemos criar formulas como:

- ((P $\vee$ Q) $\rightarrow$ *true* (Lê-se: Se P e Q então verdadeiro)
- ((P $\wedge$ Q) $\rightarrow$ *false* (Lê-se: Se P ou Q então falso)

Este raciocínio segue indefinidamente, possibilitando a criação de infinitas fórmulas.

- Exemplos de construções mal formuladas de fórmulas

As concatenações de símbolos a seguir NÃO constituem fórmulas por não ser possível obtê-las à partir das regras citadas acima:

- PQ
- (P *true* $\leftrightarrow$)
- *(true* $\rightarrow$ $\leftrightarrow$ (Q *true* $\rightarrow$))

Nota: Símbolos e parênteses podem ser omitidos quando não houver problemas na interpretação da fórmula. Além disso, as fórmulas podem ser expressas em mais de uma linha quando isso for conveniente para seu melhor entendimento.

Assim sendo, a fórmula (((P $\vee$ R) $\rightarrow$ *true*) $\leftrightarrow$ (Q $\wedge$ S)) poderia ser escrita assim:

$$\begin{gathered}(P \vee R) \rightarrow \textit{true} \\ \leftrightarrow \\ Q \wedge S\end{gathered}$$

Precedência

Assim como na matemática nós temos uma ordem de precedência para resolução de problemas, na lógica proposicional teremos uma ordem semelhante. Por exemplo, na matemática, quando temos uma expressão do tipo 2 + 4 x 5 sem indicação de parênteses, sabemos que deveremos primeiramente resolver a multiplicação e posteriormente a adição, resultando em 22 na expressão acima.

Se o resultado que desejamos obter fosse 30 devemos utilizar-mos de símbolos que ajudam a mostrar a precedência desejada na resolução do problema, no caso acima, por exemplo, (2 + 4) x 5.

Porém, quando temos situações em que há equivalência de procedência, por exemplo na expressão 4 x 6 ÷ 3 temos duas interpretações possíveis ((4 x 6) ÷ 3) ou então (4 x (6 ÷ 3)). Por isso, nessa situação é indispensável a utilização do indicador de procedência, no caso, os parênteses.

Dadas essas situações, temos na lógica proposicional, a seguinte ordem de precedência:

- maior precedência: $\neg$
- precedência intermediária: $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- menor precedência: $\vee$, $\wedge$

Quando ocorrer de equivalência de precedência, lembrem-se sempre de utilizarem os símbolos de pontuação. Por exemplo:

$$P \rightarrow Q \leftrightarrow R$$

pode ser interpretado como

$$((P \rightarrow Q) \leftrightarrow R) \text{ ou } (P \rightarrow (Q \leftrightarrow R))$$

Para eliminarmos os sinais de pontuação, poderíamos utilizar várias linhas para demonstrar nossa intenção, por exemplo:

$$\begin{array}{c} P \rightarrow Q \\ \leftrightarrow \\ R \end{array}$$

Comprimento de uma fórmula

O comprimento das fórmulas da lógica proposicional é definido por:

- Se H é um símbolo proposicional ou verdade, então o comp[H] = 1
- Se H e G são fórmulas da lógica proposicional, então:
  - comp[$\neg$H] = comp[H] + 1
  - comp[H $\vee$ G] = comp[H] + comp[G] + 1
  - comp[H $\wedge$ G] = comp[H] + comp[G] + 1
  - comp[H $\rightarrow$ G] = comp[H] + comp[G] + 1
  - comp[H $\leftrightarrow$ G] = comp[H] + comp[G] + 1

Resumindo, o comprimento de uma fórmula é obtido contando-se apenas os símbolos proposicionais, de verdade e os conectivos, desprezando-se os símbolos de pontuação.

Por exemplo, o comprimento das fórmulas $(P \rightarrow Q)$ e $((P \vee Q) \leftrightarrow R)$ são, respectivamente 3 e 5.

Subfórmulas

Informalmente, uma subfórmula é um pedaço de uma fórmula. Podemos definir subfórmulas por: Seja H uma fórmula da lógica proposicional.

- H é uma subfórmula de H
- Se $H = (\neg G)$ então G é uma subfórmula de H
- Se H é uma fórmula do tipo: $(G \vee E)$, $(G \wedge E)$, $(G \rightarrow E)$ ou $(G \leftrightarrow E)$ então G e E são subfórmulas de H.
- Se G é uma subfórmula de H, então toda subfórmula de G é uma subfórmula de H.

Conclusão

Quando trabalhamos com a lógica proposicional temos sempre que ter em mente as seguintes considerações:

Lei do Meio Excluído	*Uma proposição é falsa (**F**) ou verdadeira (**V**): não há meio termo.*
Lei da Contradição	*Uma proposição não pode ser, simultaneamente, **V** e **F**.*
Lei da Funcionalidade	*O valor lógico (**true** ou **false**) de uma proposição composta é unicamente determinado pelos valores lógicos de suas proposições constituintes.*

Bibliografia

SOUZA, João Nunes. **Lógica para Ciência da Computação**. Campus, 2002. Capítulo 1.

ALVES, João Bosco da Mota - Circuitos Lógicos – UFSC - http://www.inf.ufsc.br/ine5365/introlog.html, acessada em 12/02/2006 – Lógica Proposicional